Exercice 4 **4 points**

1. Puisque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right)$.

   On sait (croissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$, donc que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1 = -1$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, on obtient finalement par produit de limites

   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right) = -\infty$.

   L'affirmation 1 est vraie.

2. $f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$, donc : $f'(x) = -2\sin(x) - \cos(x)$. Donc :

   $$\begin{aligned} -2f'(x) + 3f(x) &= -2(-2\sin(x) - \cos(x)) + 3(2\cos(x) - \sin(x)) \\ &= 4\sin(x) + 2\cos(x) + 6\cos(x) - 3\sin(x) \\ &= \sin(x) + 8\cos(x) \end{aligned}$$

   Donc la fonction f est solution de l'équation différentielle $-2y' + 3y = \sin(x) + 8\cos(x)$.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. On a $u_0 = 25$ et donc $u_1 = \ln(3 \times 25 + 1) = \ln 76 \approx 4{,}3 < 25$.

   On peut donc supposer que la suite est décroissante ce que l'on démontre par récurrence :
   soit $(P_n) : u_{n+1} < u_n$

   Initialisation : on a vu que $u_1 < u_0$ donc P_0 est vraie.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} < u_n$: on a succesivement :

   $$\begin{aligned} u_{n+1} < u_n &\iff 3u_{n+1} < 3u_n \\ &\iff 3u_{n+1} + 1 < 3u_n + 1 \\ &\iff \ln(3u_{n+1} + 1) < \ln(3u_n + 1) \text{ par croissance de la fonction ln} \\ &\iff u_{n+2} < u_{n+1} \end{aligned}$$

   La relation est vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+1} < u_n$: ceci montre que la suite (u_n) est décroissante.

   L'affirmation 3 est vraie.

4. Une application affine est de la forme $h(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

   Donc $k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$; k est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle on a successivement :

   $k'(x) = 4x^3 + 2x + a$, puis

   $k''(x) = 12x^2 + 2$, comme un carré est supérieur ou égal à zéro, il en résulte que $k''(x) \geqslant 2 > 0$.

   Sur $\mathbb{R}$, la dérivée seconde est supérieure à zéro : la fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

   L'affirmation 4 est vraie.

5. Avec 5 lettres différentes le nombre d'anagrammes est égal à $5! = 120$.

   Comme EULER possède deux lettres identiques le nombre d'anagrammes est égal à
   $\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$.

   L'affirmation 5 est fausse.